



Prof. Dr. Rupert Frank
Leonard Wetzel

ANALYSIS EINER VARIABLEN
ÜBUNGSBLATT 6 - LÖSUNGEN

WS 2021/22
3. Dezember 2021

Definition. Sei $D \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *stetig*, falls sie in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist.

Aufgabe 1 (3 + 7 Punkte). Zeigen Sie, dass folgende Funktionen stetig sind:

- (i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$,
- (ii) $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[n]{x}$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

Lösung. (i) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen $\delta := \varepsilon$. Dann folgt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ und der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$|f(x) - f(x_0)| = ||x| - |x_0|| \leq |x - x_0| < \delta = \varepsilon,$$

also ist f in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig.

(ii) Wir beweisen zunächst folgende Ungleichung für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} \right| \leq \sqrt[n]{|a - b|}. \quad (1)$$

In der Tat: Ohne Einschränkung sei $a \leq b$, sonst vertausche die Rollen von a und b . Dann ist auch $0 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}$. Setze $h := \sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{a} \geq 0$, so dass $\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a} + h$. Mit dem binomischen Lehrsatz folgt

$$\begin{aligned} b - a &= (\sqrt[n]{a} + h)^n - a \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\sqrt[n]{a})^k h^{n-k} - a \\ &\geq (\sqrt[n]{a})^0 h^{n-0} + (\sqrt[n]{a})^n h^{n-n} - a = h^n + a - a = h^n, \end{aligned}$$

wobei wir die Summe nur durch den ersten und letzten Summanden nach unten abgeschätzt haben. Ziehen der n -ten Wurzel auf beiden Seiten liefert (1).

Nun zur Stetigkeit von f . Sei $x_0 \in [0, \infty[$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen $\delta := \varepsilon^n$. Dann folgt für alle $x \in [0, \infty[$ mit $|x - x_0| < \delta$, dass

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0} \right| \stackrel{(1)}{\leq} \sqrt[n]{|x - x_0|} < \sqrt[n]{\delta} = \varepsilon.$$

Also ist f in jedem Punkt $x_0 \in [0, \infty[$ stetig.

Bemerkung: Der obige Beweis zeigt, dass f sogar *gleichmäßig stetig* ist, da die Wahl von δ nicht von x_0 abhängt. $\square$

Aufgabe 2 (10 Punkte). Sei $f:]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{für } x = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd,} \\ 0 & \text{für } x \in]0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zeigen Sie: f ist stetig in jedem Punkt $x \in]0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ und unstetig in jedem Punkt $x \in]0, 1] \cap \mathbb{Q}$.

Hinweis: Zum Beweis der Stetigkeit in allen irrationalen Punkten kann man folgendermaßen vorgehen: Sei $a \in]0, 1] \setminus \mathbb{Q}$. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle $s \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{s} < \varepsilon$. Setze dann

$$M_s := \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq n \leq s \right\} \subset \mathbb{Q}$$

und $\delta := \inf\{|y - a| : y \in M_s\}$.

Lösung. Wir beginnen mit der Stetigkeit von f in jedem $a \in]0, 1] \setminus \mathbb{Q}$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Seien zudem s und M_s wie im Hinweis. Da M_s endlich ist und jede endliche Menge reeller Zahlen ein Minimum besitzt (Induktion!), folgt

$$\delta := \inf\{|y - a| : y \in M_s\} = \min\{|y - a| : y \in M_s\} > 0.$$

Sei $x \in]0, 1]$ mit $|x - a| < \delta$. Falls x irrational ist, so ist

$$|f(x) - f(a)| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon,$$

und wir sind fertig. Falls x rational ist, können wir $x = \frac{p}{q}$ schreiben mit $p, q \in \mathbb{N}$ teilerfremd (so dass der Bruch maximal gekürzt ist). Wegen $x \in]0, 1]$ muss $1 \leq p \leq q$ gelten. Weiter folgt aus $|x - a| < \delta$ nach Definition von δ , dass $x \notin M_s$ (sonst wäre $\delta \leq |x - a|$, Widerspruch).

Zusammen genommen ergibt $1 \leq p \leq q$ und $x \notin M_s$, dass $q > s$. Wir erhalten

$$|f(x) - f(a)| = |f(x)| = \frac{1}{q} < \frac{1}{s} < \varepsilon,$$

also ist f stetig in a . Da a eine beliebige irrationale Zahl in $]0, 1]$ war, folgt die Behauptung.

Es verbleibt zu zeigen, dass f in jedem rationalen $a \in]0, 1] \cap \mathbb{Q}$ unstetig ist. Sei ein solches a gegeben. Nach Tutoriumsblatt 6, Aufgabe 2 existiert eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ irrationaler Zahlen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Aber dann ist $f(a_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 0 \neq f(a),$$

also kann f nach dem Folgenkriterium nicht stetig in a sein. □

Aufgabe 3 (4 + 6 Punkte). Betrachten Sie die Reihe

$$C(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Zeigen Sie:

- (i) $C(x)$ ist absolut konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$2C(x)^2 = C(2x) + 1.$$

Hinweis: Das Cauchy-Produkt und die (bei Benutzung zu beweisende) Identität

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} = 2^{2n-1}$$

für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ können nützlich sein.

Lösung. (i) Für $x = 0$ ist die Konvergenz klar, sei also $x \neq 0$. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x|^{2n+2}(2n)!}{|x|^{2n}(2n+2)!} = |x|^2 \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

also konvergiert die Reihe $C(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut nach dem Quotientenkriterium.

(ii) Sei $x \in \mathbb{R}$. Wegen der in (i) bewiesenen absoluten Konvergenz von $C(x)$ lässt sich der Satz über das Cauchy-Produkt anwenden (Prop. im Abschnitt Cauchy-Produkte), welcher

$$C(x)^2 = C(x) \cdot C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$$

mit

$$a_k = \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

liefert. Wir berechnen für die innere Summe

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (-1)^{n-k}}{(2k)! (2n-2k)!} x^{2k} x^{2n-2k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^n}{(2k)! (2n-2k)!} x^{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k}. \end{aligned}$$

Für $n = 0$ ist

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} = \binom{0}{0} = 1,$$

und für $n \geq 1$ nach dem Hinweis

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} = 2^{2n-1}. \quad (2)$$

Wir geben den Beweis für (2) im Anschluss. Mit den obigen Rechnungen folgt schlussendlich

$$\begin{aligned} C(x)^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^0 a_k a_{0-k} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} 2^{2n-1} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (2x)^{2n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (2x)^{2n} - 1 \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} C(2x), \end{aligned}$$

also die gewünschte Formel.

Wir zeigen nun noch die Identität (2). Nach dem binomischen Lehrsatz ist

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$$

und

$$0 = (1-1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}.$$

Addieren beider Gleichungen liefert

$$2^{2n} = 2 \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k},$$

wie gewünscht. □

Aufgabe 4 (10 Punkte). Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit der Eigenschaft, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, aber nicht absolut konvergent ist. Zeigen Sie: Es existiert eine Umordnung (d.h. bijektive Abbildung) $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)} = +\infty.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Teilfolgen $(a_{p_k})_{k \in \mathbb{N}}$ aller nichtnegativen und $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ aller negativen Folgenglieder. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{p_k} = +\infty$$

gelten muss und konstruieren Sie mit Hilfe dieser Tatsache die gewünschte Umordnung τ .

Lösung. Wir definieren

$$a_n^+ := \begin{cases} a_n & \text{falls } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{falls } a_n < 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad a_n^- := \begin{cases} -a_n & \text{falls } a_n \leq 0 \\ 0 & \text{falls } a_n > 0 \end{cases}.$$

Dann ist $a_n^+, a_n^- \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gilt

$$a_n^+ + a_n^- = |a_n|, \quad a_n^+ - a_n^- = a_n.$$

Daraus folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ (bestimmt gegen $+\infty$) divergiert, denn sonst wäre wegen $a_n^- = a_n^+ + a_n$ auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ konvergent und damit auch $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, Widerspruch.

Wir betrachten nun die Teilfolgen $(a_{p_k})_{k \in \mathbb{N}}$ aller nichtnegativen (d.h. $a_{p_k} \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$) und $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ aller negativen Folgenglieder. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{p_k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty.$$

Per Definition von bestimmter Divergenz gegen $+\infty$ existiert also für jedes $R > 0$ eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{n=1}^N a_{p_k} \geq R.$$

Sei $b_0 := 0$ und für $l \in \mathbb{N}$ mit $l \geq 1$ sei b_l die kleinste natürliche Zahl größer als b_{l-1} und

$$\sum_{k=b_{l-1}+1}^{b_l} a_{p_k} \geq |a_{n_l}| + 1. \quad (3)$$

Definiere die Permutation $\tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ durch

$$(\tau(1), \tau(2), \tau(3), \dots) := (p_1, p_2, \dots, p_{b_1}, n_1, p_{b_1+1}, p_{b_1+2}, \dots, p_{b_2}, n_2, \dots).$$

τ ist in der Tat bijektiv, denn jedes der p_k und n_k korrespondiert zu genau einem Folgenglied der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Nun ist für jedes $l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{b_l+l} a_{\tau(k)} &= \sum_{k=1}^{b_1+1} a_{\tau(k)} + \sum_{j=2}^l \left[\sum_{k=b_{j-1}+2(j-1)}^{b_j+(2j-1)} a_{\tau(k)} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{b_1} a_{\tau(k)} + a_{\tau(b_1+1)} + \sum_{j=2}^l \left[\sum_{k=b_{j-1}+2(j-1)}^{b_j+(2j-2)} a_{\tau(k)} + a_{\tau(b_j+(2j-1))} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{b_1} a_{p_k} + a_{n_1} + \sum_{j=2}^l \left[\sum_{k=b_{j-1}+1}^{b_j} a_{p_k} + a_{n_j} \right] \\ &\stackrel{(3)}{\geq} 1 + |a_{n_1}| + a_{n_1} + \sum_{j=2}^l \left[1 + |a_{n_j}| + a_{n_j} \right] \geq 1 + \sum_{j=2}^l 1 = l. \end{aligned}$$

Hier haben wir $a_{n_j} + |a_{n_j}| \geq 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$ benutzt. Da $l \in \mathbb{N}$ beliebig war, folgt aus obiger Ungleichungskette

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)} = +\infty,$$

wie gewünscht. □